

KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów klas IV-VIII szkół podstawowych
województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2019/2020

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	C	D	P, P	C, D

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $a = 3^{15}$, $b = 8^{10}$, $c = 2^{32}$, to $a < b < c$.

Uczeń:	
1. Zapisuje, że $b = 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$	1p.
2. Zapisuje, że $b = 2^{30} = (2^2)^{15} = 4^{15} > 3^{15} = a$, stąd wnioskuję, że $a < b < c$	1p.

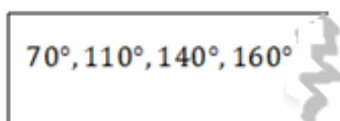
Zadanie 6. (2 pkt)

Bartek ma 4 lata i kilkoro rodzeństwa. Średnia wieku jego rodziny (rodzice i dzieci) wynosi 19 lat, a średnia wieku rodziny liczona bez wieku Bartka jest równa 22 lata. Ile rodzeństwa ma Bartek? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. Oznacza przez x liczbę osób w rodzinie i zapisuje równanie: $19x - 4 = 22(x - 1)$	1p.
2. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $19x - 4 = 22x - 22$ $3x = 18, x = 6$ Odpowiedź: Ponieważ w rodzinie jest czworo dzieci, więc Bartek ma troje rodzeństwa.	1p.
<i>Uwaga. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiąże równanie, ale nie poda (nie wyznaczy), ile rodzeństwa ma Bartek, to otrzymuje 1 punkt.</i>	

Zadanie 7. (3 pkt)

Wojtek zmierzył w każdym z dwóch trójkątów trzy kąty zewnętrzne (po jednym przy każdym wierzchołku). Wyniki pomiarów zapisał na kartce (w dowolnej kolejności), a potem tak nieszczęśliwie oddał część kartki, że zgubił dwa z nich. Kasia spojrzała na pozostałe cztery wyniki i stwierdziła, że jeden z trójkątów musiał być równoramienny. Odtwórz (Podaj) brakujące wyniki pomiarów Wojtka i uzasadnij, że jeden z tych trójkątów był równoramienny lub prostokątny.



Uczeń:	
1. Podaje miary czterech kątów wewnętrznych tych trójkątów: $110^\circ, 70^\circ, 40^\circ, 20^\circ$ oraz	1p.

zauważa, że jeden z tych trójkątów jest rozwartokątny. Rozważa trójkąt rozwartokątny: np. kąt rozwarty ma 110°, a jeden z pozostałych jego kątów może mieć: 40° lub 20° (nie może mieć 70°). <i>Przypadek I</i> Jeśli ma 40°, to trzeci kąt ma 30°. Wobec tego kąty wewnętrzne tego trójkąta mają miary $110^\circ, 40^\circ, 30^\circ$ <i>Przypadek II</i> Jeśli ma 20°, to trzeci kąt ma 50°. Wobec tego kąty wewnętrzne tego trójkąta mają miary $110^\circ, 20^\circ, 50^\circ$.	
2. Określa kąty w drugim trójkącie w zależności od otrzymanego trójkąta rozwartokątnego. Np. <i>Przypadek I:</i> Jeśli kąt o mierze 20° jest kątem drugiego trójkąta, to kąty drugiego trójkąta mają miary: $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ (trójkąt prostokątny). <i>Przypadek II:</i> Jeśli kąt o mierze 40° jest kątem drugiego trójkąta, to kąty drugiego trójkąta mają miary: $70^\circ, 40^\circ, 70^\circ$ (trójkąt równoramienny).	1p.
3. Odtwarza pomiary i podaje brakujące pary kątów zewnętrznych. Np. <i>Przypadek I:</i> Kąty zewnętrzne trójkąta rozwartokątnego mają miary: $70^\circ, 140^\circ, 150^\circ$, więc brakującym wynikiem pomiarów jest 150°. Wówczas w drugim trójkącie kąty zewnętrzne to: $160^\circ, 110^\circ, 90^\circ$, zatem brakującym wynikiem pomiarów jest 90°. <i>Przypadek II:</i> Kąty zewnętrzne trójkąta rozwartokątnego mają miary: $70^\circ, 160^\circ, 130^\circ$, więc brakującym wynikiem pomiarów jest 130°. Wówczas w drugim trójkącie kąty zewnętrzne to: $110^\circ, 140^\circ, 110^\circ$, zatem brakującym wynikiem pomiarów jest 110°. Odpowiedź: Brakującymi wynikami pomiarów są pary: 90° i 150° lub 110° i 130°. <i>Uwaga: W przypadku, gdy uczeń rozważy w pełni jeden istotny przypadek: trójkąt równoramienny albo trójkąt prostokątny i poda jedną brakującą parę kątów zewnętrznych, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.</i>	1p.

Zadanie 8. (3 pkt)

Weronika i młodsza od niej Karolina rozpoczęły bieg o godzinie 17.00. Weronika goni Karolinę, a odległość między nimi na starcie wynosiła 180 m. Weronika w ciągu 5 sekund robi 25 kroków, a Karolina w ciągu 8 sekund 36 kroków. Krok Weroniki ma 0,6 m, a Karoliny 0,5 m. O której godzinie Weronika dogoni Karolinę? Odpowiedź uzasadnij.

Przyjmij, że podczas biegu długości kroków oraz prędkości obu dziewcząt nie zmieniają się.

I sposób

Uczeń:	
1. Oblicza, jakie dystanse pokonują dziewczęta w ciągu 40 s (gdyż jest to najmniejsza wspólna wielokrotność dla 5 s i 8 s): Weronika w ciągu 40 sekund robi 200 kroków, czyli pokonuje dystans 120 metrów, a Karolina w tym samym czasie robi 180 kroków, czyli pokonuje dystans 90 metrów.	1p.
2. Oblicza, o ile metrów Weronika zbliża się do Karoliny w ciągu 40 sekund: $120\text{ m} - 90\text{ m} = 30\text{ m}$ (o 30 metrów).	1p.
3. Oblicza po jakim czasie Weronika dogoni Karolinę i podaje odpowiedź. Np.: $180\text{ m} : 30\text{ m} = 6$ (6 razy po 40 s), więc po $6 \cdot 40 = 240$ sekundach czyli dogoni ją po 4 minutach. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p.

II sposób

Uczeń:	
1. Oblicza, że Weronika biegnie 3 metry na sekundę: $\frac{25}{5\text{ s}} \cdot 0,6\text{ m} = 3\text{ m/s}$, a Karolina 2,25 metra na sekundę: $\frac{36}{8\text{ s}} \cdot 0,5\text{ m} = 2,25\text{ m/s}$.	1p.
2. Oblicza, że Weronika w każdej sekundzie nadrabia trzy czwarte metra: $3\text{ m/s} - 2,25\text{ m/s} = 0,75\text{ m/s}$.	1p.
3. Oblicza po jakim czasie Weronika dogoni Karolinę i podaje odpowiedź. Np. $180\text{ m} : 0,75\text{ m/s} = 240\text{ s}$, czyli dogoni ją po 4 minutach. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p.

III sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje zależności wynikające z treści zadania. Np.: x – droga Karoliny do spotkania z Weroniką V_W – prędkość Weroniki, V_K – prędkość Karoliny S_W – droga Weroniki do spotkania z Karoliną S_K – droga Karoliny do spotkania z Weroniką t – czas po jakim dziewczynki się spotkają	1p.

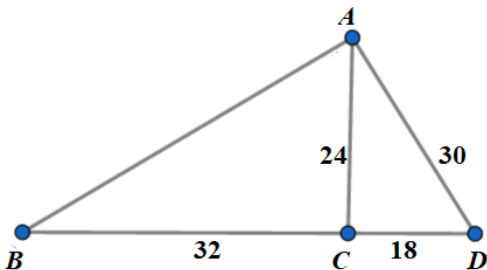
$V_W = 3 \text{ m/s}$ oraz $S_W = 180 + x$ $V_K = 2,25 \text{ m/s}$ oraz $S_K = x$ $t = \frac{S_W}{V_W} = \frac{S_K}{V_K}$	
2. Oblicza drogę jaką przebyła Karolina do spotkania z Weroniką. $\frac{180+x}{3} = \frac{x}{2,25}$ zatem $2,25(180 + x) = 3x$, stąd $x = 540 \text{ [m]}$	1p.
3. Oblicza czas po jakim dziewczynki się spotkają i podaje odpowiedź. $t = \frac{720}{3}$, stąd $t = 240 \text{ [s]}$, $t = 4 \text{ [min]}$. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p.

Zadanie 9. (3 pkt)

Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D , które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- odległość punktu A od punktu C wynosi 24;
- odległość punktu A od punktu D wynosi 30;
- odległość punktu D od punktu B wynosi 50;
- odległość punktu D od punktu C wynosi 18;
- odległość między punktami C i B wynosi 32.

Jaka jest odległość między punktami A i B ? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Wykazuje, że punkty B, C, D są współliniowe, bo $32 + 18 = 50$, wykonuje poprawny rysunek:	1p.
	
2. Uzasadnia, że trójkąty ACD i ACB są prostokątne. Np. Trójkąt ACD jest prostokątny, bo $24^2 + 18^2 = 30^2$ Trójkąt ACB jest prostokątny, bo kąt $ACB = 90^\circ$	1p.
3. Oblicza długość odcinka AB i podaje odpowiedź. $ AB ^2 = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600$ stąd $ AB = 40$ Odpowiedź: Odległość między punktami A i B wynosi 40.	1p.

Zadanie 10. (3 pkt)

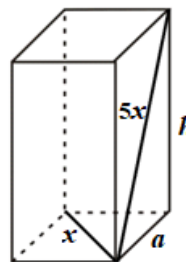
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest pięć razy krótsza od przekątnej ściany bocznej. Objętość tego graniastosłupa wynosi 7. Jaką długość ma krawędź podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

Uczeń:

- Wykonuje rysunek, zapisuje długość krawędzi podstawy w zależności od długości przekątnej podstawy. Np.

$$a^2 + a^2 = x^2, \quad 2a^2 = x^2, \quad a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$



1p.

- Zapisuje wysokość h i objętość V graniastosłupa w zależności od długości przekątnej podstawy. Np.

$$a^2 + h^2 = 25x^2, \quad h^2 = 25x^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{49x^2}{2}, \quad h = \frac{7\sqrt{2}x}{2}$$

$$V = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}x}{2} = \frac{7\sqrt{2}x^3}{4}$$

- Oblicza długości: przekątnej oraz krawędzi podstawy graniastosłupa. Podaje odpowiedź.

1p.

Np. Przekształca równanie $\frac{7\sqrt{2}x^3}{4} = 7$ do postaci $x^3\sqrt{2} = 4$. Stąd $x = \sqrt{2}$ zatem

$$a = \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$$

Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa 1.

II sposób

Uczeń: 1. Wykonuje rysunek, zapisuje długości: przekątnej podstawy i przekątnej ściany bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy. Np. $x^2 = a^2 + a^2, \quad x^2 = 2a^2, \quad x = a\sqrt{2}, \quad \text{czyli } 5x = 5a\sqrt{2}$ 2. Wyznacza wysokość h i objętość V graniastosłupa. Np. $h^2 = 50a^2 - a^2, \quad h^2 = 49a^2, \quad h = 7a \quad \text{stąd } V = 7a^3$ 3. Oblicza długość krawędzi podstawy a graniastosłupa i podaje odpowiedź. $V = 7a^3 = 7, \quad \text{stąd } a = 1$ Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa 1.	1p. 1p. 1p.
--	----------------------------------

