



MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP WOJEWÓDZKI 2021/2022

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	B., D.	B.	C.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Szybę do okrągłego okna wycięto z kwadratowej tafli tak, aby było jak najmniej odpadów. Na tej szybie Zosia wykonała kolorowy rysunek w kształcie sześciokąta foremnego tak, że wierzchołki rysunku leżą na obrzeżach szyby. Oblicz pole szklanych odpadów, jeśli pole rysunku Zosi wynosi $24\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Do obliczeń przyjmij, że $\pi = 3$.

Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i oblicza długość promienia szyby okna.

$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$3a^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

$$a^2 = 16$$

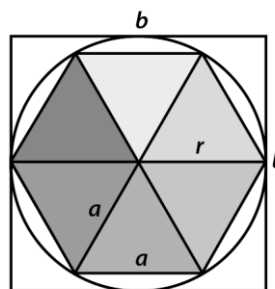
$$a = 4 \text{ [dm]} = r$$

2. Oblicza pole szklanych odpadów.

Pole szklanych odpadów jest równe różnicy pola P_1 kwadratu o boku b i pola P_2 koła o promieniu r .

$$b = 2r \quad P_1 = 4r^2 = 64 \text{ [dm}^2\text{]}, \quad P_2 = \pi r^2 = 16\pi \text{ [dm}^2\text{]},$$

$$P_1 - P_2 = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi) = 16(4 - 3) = 16 \text{ [dm}^2\text{]}$$



1p.

1p.

Zadanie 5. (0-2 pkt)

W urnie są kule białe i czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi $\frac{1}{4}$. Gdy dołożymy cztery białe kule, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wzrośnie o 0,15. Oblicz, ile białych i ile czerwonych kul jest w tej urnie.

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania i układa równanie. x – liczba białych kul $4x$ – liczba wszystkich kul $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + 0,15$ 2. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{2}{5}$ $5x + 20 = 8x + 8$ $3x = 12, \quad x = 4$ Liczba czerwonych kul: $4x - x = 3x = 12$ Odpowiedź. W urnie są 4 białe kule i 12 czerwonych kul przed zmianą. lub W urnie jest 8 białych kul i 12 czerwonych kul po dołożeniu.	1p. 1p.
---	-----------------------

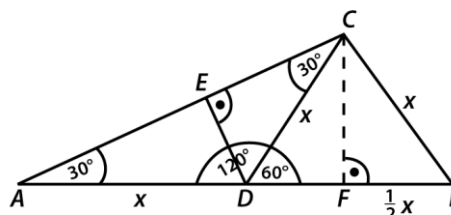
Zadanie 6. (0-2 pkt)

W trójkącie różnobocznym ABC środek D najdłuższego boku połączono z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta. Trójkąt ABC został podzielony na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Oblicz, ile procent pola trójkąta ABC stanowi pole powstałego trójkąta równobocznego.

I sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzasadnia, że pole trójkąta ADC jest równe polu trójkąta DCB i podaje odpowiedź.

Trójkąty ADE i DCE są przystające (cecha kbk) i każdy z nich jest połową trójkąta równobocznego o boku x , a więc suma ich pól jest równa polu trójkąta DBC .

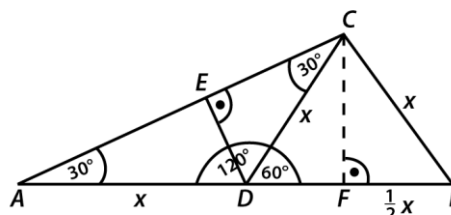
1p.

Odpowiedź. Pole trójkąta DBC stanowi 50% pola trójkąta ABC .

II sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku i uzasadnia, że trójkąt ABC jest prostokątny.



1p.

Miara kąta DCB wynosi 60° , więc kąt ACB jest prosty, zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

2. Uzasadnia, że pole trójkąta ADC jest równe polu trójkąta DCB i podaje odpowiedź.

Trójkąty ADE i DCE są przystające (cecha kbk), więc odcinki AE i EC są jednakowej długości równej $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Pole P_1 trójkąta ABC wynosi

1p.

$$P_1 = \frac{x\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole P_2 trójkąta równobocznego o boku x wynosi

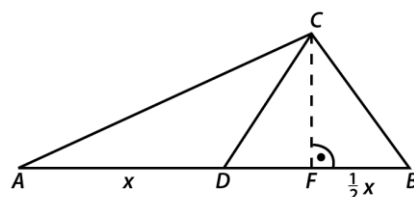
$$P_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}, \text{ a więc jest połową pola trójkąta } ABC.$$

Odpowiedź. Pole trójkąta DBC stanowi 50% pola trójkąta ABC .

III sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzasadnia, że pola trójkątów ADC i DBC są równe i podaje odpowiedź.

W trójkątach ADC i DBC podstawy AD i DB są jednakowej długości, a wysokość CF jest wspólna, a więc pola tych trójkątów są równe, zatem pole trójkąta DBC jest połową pola trójkąta ABC .

Odpowiedź. Pole trójkąta DBC stanowi 50% pola trójkąta ABC .

1p.

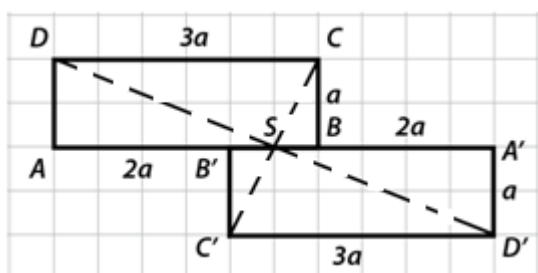
Zadanie 7. (0-2 pkt)

W prostokącie $ABCD$ bok AD jest trzy razy krótszy od boku AB . Punkt S dzieli bok AB w stosunku 5:1 licząc od wierzchołka A . Prostokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny do prostokąta $ABCD$ względem punktu S . Oblicz, jaką częścią obwodu wielokąta $AB'C'D'A'BCD$ jest obwód prostokąta $ABCD$.

Uczeń:

1. Analizuje zadanie wykonując rysunek pomocniczy i oznacza długości odpowiednich odcinków za pomocą a np.

1p.



2. Oblicza, jaką częścią obwodu wielokąta $AB'C'D'A'BCD$ jest obwód prostokąta $ABCD$ i podaje odpowiedź

1p.

Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy $8a$.

Obwód wielokąta $AB'C'D'A'BCD$ jest równy $14a$.

Odpowiedź. Obwód prostokąta $ABCD$ stanowi $\frac{4}{7}$ obwodu wielokąta $AB'C'D'A'BCD$.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Pewna firma otrzymała zamówienie na dwa typy kodów dla uczestników internetowej grupy dyskusyjnej.

Kody typu I mają mieć dwie litery na początku i jedną na końcu, a między nimi 3 cyfry. Mogą w nich występować tylko litery S, B i K oraz cyfry 4, 6, 8, przy czym litery i cyfry mogą się powtarzać.

Kody typu II mają mieć na początku dwie litery spośród: W, Y i Z, a następnie 5 cyfr spośród: 1, 3, 5, 7, 9, przy czym litery i cyfry nie mogą się powtarzać.

Ilu maksymalnie uczestników może liczyć ta grupa, jeśli każdy uczestnik musi mieć inny kod? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu I. W kodach typu I: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, drugą i ostatnią też na 3 (bo litery mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę oraz każdą kolejną można wybrać na 3 sposoby (bo cyfry mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ kodów pierwszego typu.	1p.
2. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu II. W kodach typu II: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, a drugą już tylko na 2 sposoby (bo litery nie mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3, czwartą na 2, a piątą na 1 sposób (bo cyfry nie mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ kodów drugiego rodzaju.	1p.
3. Oblicza, ilu maksymalnie uczestników może liczyć internetowa grupa dyskusyjna. Łącznie jest $729 + 720 = 1449$ kodów. Odpowiedź. Internetowa grupa dyskusyjna może maksymalnie liczyć 1449 uczestników.	1p.

Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania np.: x – opłata za pierwszą godzinę. $2 \cdot (x + 1,5) = 2x + 3$ - opłata za drugą i trzecią godzinę $2 \cdot (x + 2) = 2x + 4$ - opłata za czwartą i piątą godzinę $4x$ - opłata za szóstą i siódmą godzinę 2. Układa nierówności. $x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \leq 34$ oraz $x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \geq 16$ 3. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź. $9x \leq 34 - 7$ oraz $9x \geq 16 - 7$ $9x \leq 27$ $9x \geq 9$ $x \leq 3$ $x \geq 1$ zatem $1 \leq x \leq 3$ Odpowiedź. Opłata za pierwszą godzinę parkowania mogła wynosić 1 zł lub 2 zł, lub 3 zł.	1p. 1p. 1p.
--	----------------------------------

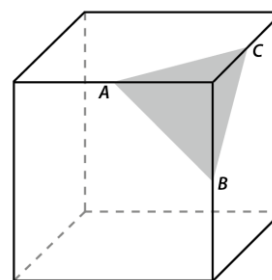
Zadanie 10. (0-3 pkt)

Filip z drewnianego klocka sześciennego odciął wszystkie „rogi” i w ten sposób otrzymał nowe klocki.

Na rysunku pokazano sposób odcięcia jednego „rogu”, a zaznaczone punkty A , B , C są środkami krawędzi sześcianu.

Klocki w kształcie „rogów” Filip pomalował na czerwono, a pozostały klocek na zielono.

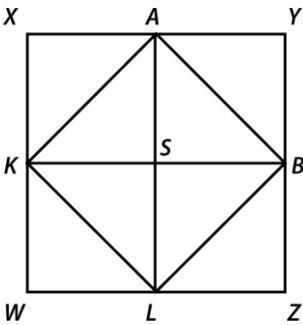
Czy łączna powierzchnia wszystkich klocków czerwonych jest większa od powierzchni klocka zielonego? Odpowiedź uzasadnij.



I sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje, że długość krawędzi sześcianu jest równa np. a, oraz zauważa, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów” jest kwadratem. Czworokąt $ABLK$ jest kwadratem ponieważ każdy z przystających trójkątów ABY, BZL, LWK, KXA jest prostokątny równoramienny, a więc kąty przy podstawie mają po 45°. Stwierdza, że $AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ np. wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.	1p.
2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów”. Ponieważ sześcián ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworoboku, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, a ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych równych $\frac{1}{2}a$ oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i 6 kwadratów o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	1p.
3. Poprawnie zapisuje za pomocą wyrażeń powierzchnię P_1 czerwonych klocków i powierzchnię P_2 zielonego klocka oraz porównuje je. $P_1 = 8 \cdot \left(\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2}{8} \cdot 3 \right) = 2 \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = a^2\sqrt{3} + 3a^2 = a^2(3 + \sqrt{3})$ $P_2 = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}),$ a zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka. <i>Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.</i>	1p.

II sposób

Uczeń:		1p.
1. Zauważa np. wykonując rysunek, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów” jest kwadratem o polu P_1 równym połowie pola P_2 ściany sześcianu oraz polu czterech ścian bocznych odciętych „rogów”.		
Trójkąty AYB, BZL, LWK, KXA, ASB, BSL, LSK, KSA są przystające, więc $P_{ABLK} = \frac{1}{2}P_{XYZW} = 4 \cdot P_{ABY}$		
2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów”.		1p.
Ponieważ sześcian ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworoscianu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a ściany są przystającymi trójkątami prostokątnymi oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego przystającego do podstawy czerwonego klocka i 6 kwadratów o polu równym polu trzech ścian sześcianu.		
3. Porównuje pola powierzchni wszystkich czerwonych klocków z polem powierzchni zielonego klocka.		1p.
Na pole powierzchni czerwonych klocków składają się pola: 8 trójkątów równobocznych identycznych jak ściany w klocku zielonym oraz 24 jednakowych trójkątów prostokątnych. Pole 4 tych trójkątów odpowiada polu jednego kwadratu w zielonym klocku, a więc pole 24 trójkątów prostokątnych odpowiada polu 6 kwadratów w zielonym klocku. Zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka.		
<i>Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.</i>		