

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2024/2025

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może otrzymać maksymalnie 1 punkt, a za rozwiązanie zadania otwartego 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	A., D.	A., C.	F., P.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że wartość liczbową wyrażenia: $8\sqrt{5} + \frac{2(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2}$ jest liczbą naturalną i wyznacz wszystkie jej dzielniki naturalne.

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania i oblicza wartość wyrażenia. $8\sqrt{5} + \frac{2(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2} = 8\sqrt{5} + \frac{2(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = 8\sqrt{5} + \frac{2(5-4\sqrt{5}+4)}{5-4} = 8\sqrt{5} + \frac{18-8\sqrt{5}}{1} = 18$ 2. Wyznacza wszystkie dzielniki naturalne liczby 18. Liczba 18 dzieli się przez 1, 2, 3, 6, 9, 18.	1p. 1p.
--	-----------------------

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Niech a i b będą liczbami całkowitymi spełniającymi nierówność $0 < a < b$. Zarówno licznik, jak i mianownik ułamka $\frac{a}{b}$ zwiększono o 3. Rozstrzygnij, czy tak otrzymana liczba jest zawsze równa, większa czy mniejsza od wyjściowej. Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania, zapisuje różnicę ułamków, sprowadza je do wspólnego mianownika. Licznik i mianownik ułamka właściwego są liczbami naturalnymi różnymi od zera i nie mającymi wspólnych dzielników oprócz 1, przy czym licznik jest większy od mianownika. a – licznik, b – mianownik, $a < b$ oraz a, b – liczby naturalne i $a, b > 0$ $\frac{a}{b}$ - dany ułamek $\frac{a+3}{b+3}$ - ułamek po zmianie	1p.
---	------------

$\frac{a}{b} - \frac{a+3}{b+3} = \frac{a(b+3) - b(a+3)}{b(b+3)}$ 2. Uzasadnia, że otrzymany ułamek jest większy od danego ułamka. $\frac{ab + 3a - ab - 3b}{b(b+3)} = \frac{3(a-b)}{b(b+3)}$ Ponieważ $a < b$, więc licznik jest liczbą ujemną. Mianownik jest liczbą dodatnią, zatem różnica danego ułamka i ułamka po zmianie jest liczbą ujemną, co dowodzi, że ułamek po tej zmianie jest większy od danego.	1p.
--	-----

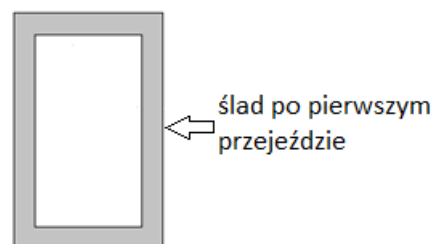
II sposób

Uczeń: 1. Analizuje treść zadania, sprawdza zależność między ułamkami (= lub < lub >) i przekształca wyrażenie. Licznik i mianownik ułamka właściwego są liczbami naturalnymi różnymi od zera, przy czym licznik jest większy od mianownika. a – licznik, b – mianownik, $a < b$ oraz a, b – liczby naturalne i $a, b > 0$ $\frac{a}{b}$ - dany ułamek $\frac{a+3}{b+3}$ - ułamek po zmianie Sprawdza zależność między ułamkami: $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{a+3}{b+3}$ Mnoży zależność stronami wiedząc, że liczniki i mianowniki ułamków są dodatnie. $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{a+3}{b+3} \cdot b(b+3)$ 2. Uzasadnia, że otrzymany ułamek jest większy od danego ułamka. Ponieważ ułamki $\frac{ab + 3ab(b+3)}{ab + 3ab(b+3)}$ oraz $\frac{ab + 3ab(b+3)}{ab + 3ab(b+3)}$ mają jednakowe mianowniki, więc ten ułamek jest większy (mniejszy, równy), który ma większy (mniejszy, równy) licznik. Wystarczy zatem porównać wyrażenia: $ab + 3a$ oraz $ab + 3b$, $3a < 3b$ ponieważ $a < b$. Zatem ułamek po tej zmianie jest większy od danego.	1p. 1p.
---	-----------------------

Uwaga: Jeżeli uczeń sprawdza zależność na konkretnych przykładach i tylko na tej podstawie porównuje ułamki - otrzymuje 0 punktów za zadanie.

Zadanie 6. (0-2 pkt)

Pan Robert kosi prostokątny trawnik o długości 16 m kosiarką, której szerokość cięcia wynosi 50 cm. Po jednym przejeździe wzdłuż brzegów trawnika (patrz rysunek), zostało mu do skoszenia 120 m^2 . Oblicz, ile przejazdów trzeba wykonać, aby skosić trawnik w kształcie kwadratu, o polu równym polu trawnika pana Roberta.



Uczeń:

Wykonuje analizę zadania i oblicza szerokość prostokątnego trawnika. Po pierwszym przejeździe otrzymujemy sytuację, jak na rysunku obok. Z tego wynika, że skoszenie całego trawnika wymaga tylu obrotów, ile wynosi szerokość trawnika wyrażona w metrach.

Oblicza szerokość prostokątnego trawnika.

$$15(x - 1) = 120$$

$$15x - 15 = 120$$

$$x = 135 : 15 = 9 \text{ [m]} \text{ szerokość trawnika.}$$

2. Oblicza, ile przejazdów trzeba wykonać, gdyby trawnik był kwadratem o polu równym polu trawnika Pana Roberta i podaje odpowiedź.

Aby obliczyć liczbę przejazdów do skoszenia trawnika w kształcie kwadratu, wystarczy obliczyć długość boku tego kwadratu.

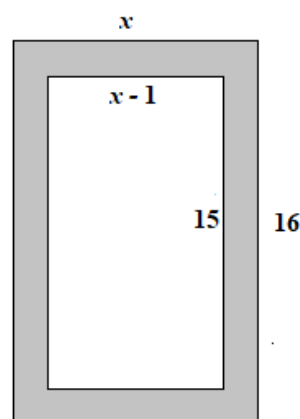
P – pole kwadratu

a – długość boku kwadratu

$$P = 9 \cdot 16 = 144 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P = a^2 = 144, \text{ stąd } a = 12 \text{ [m]}$$

Odpowiedź. Gdyby ten trawnik był kwadratem, to trzeba wykonać 12 przejazdów.



1p.

1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Miara jednego z kątów trójkąta jest równa różnicy miar dwóch pozostałych kątów. Długość najdłuższego boku wynosi $2\sqrt{5}$, a najkrótszego boku $2\sqrt{2}$. Oblicz pole tego trójkąta.

Uczeń:

1. Analizuje treść zadania np. na rysunku i uzasadnia, że dany trójkąt jest prostokątny.

1p.

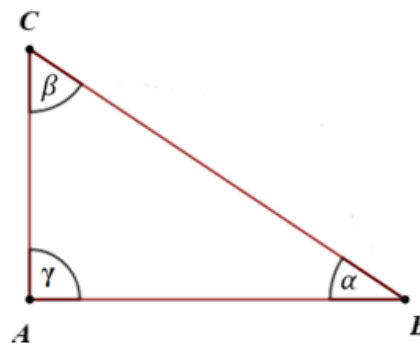
$$\alpha = \gamma - \beta, \text{ stąd } \alpha + \beta = \gamma, \text{ ale}$$

$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ,$$

$$\text{więc } 2\gamma = 180^\circ,$$

$$\text{czyli } \gamma = 90^\circ,$$

zatem trójkąt ABC jest prostokątny.



2. Oblicza długość boku AC stosując Twierdzenie Pitagorasa.

$$|BC| = 2\sqrt{5},$$

$$|AB| = 2\sqrt{2}.$$

Zatem

$$|AC|^2 = (2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 20 - 8 = 12,$$

$$\text{stąd } |AC| = 2\sqrt{3}.$$

3. Oblicza pole trójkąta ABC .

$$P_{ABC} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

1p.

1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

W listopadzie w pewnej osiedlowej piekarni zamówiono bułki pszenne i żytnie na obchody święta szkoły. W związku z tym miesięczna produkcja bułek pszennych w porównaniu do poprzedniego miesiąca wzrosła o 400 sztuk, a bułek żytnich o 4%. To spowodowało wzrost łącznej produkcji tych bułek o 600 sztuk. W październiku stosunek produkcji bułek żytnich do produkcji bułek pszennych wynosił 1 : 5. Oblicz, ile bułek żytnich, a ile pszennych wypieczono w listopadzie.

I sposób

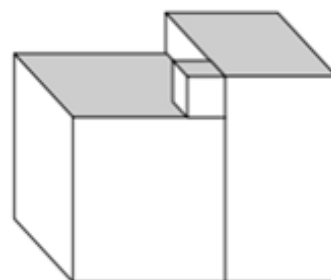
Uczeń: 1. Przeprowadza analizę treści zadania i zapisuje zależności między poszczególnymi wielkościami w postaci układu równań. a – miesięczna produkcja bułek pszennych w październiku b – miesięczna produkcja bułek żytnich w październiku $a + 400$ – miesięczna produkcja bułek pszennych w listopadzie $1,04b$ – miesięczna produkcja bułek żytnich w listopadzie $\begin{cases} a + b + 600 = a + 400 + 1,04b \\ b : a = 1 : 5 \end{cases}$ 2. Rozwiązuje układ równań. $\begin{cases} 0,04b = 200 \\ a = 5b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 5000 \\ a = 25\,000 \end{cases}$ 3. Oblicza miesięczną produkcję bułek pszennych w listopadzie i podaje odpowiedź. Produkcja w listopadzie: Bułki pszenne $25\,000 + 400 = 25400$ Bułki żytnie $1,04 \cdot 5000 = 5200$ Odpowiedź. W listopadzie ta piekarnia wypiekła 5200 sztuk bułek żytnich oraz 25 400 sztuk bułek pszennych.	1p. 1p. 1p.
---	----------------------------------

II sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę treści zadania i oblicza, o ile sztuk wzrosła produkcja bułek żytnich. a – miesięczna produkcja bułek pszennych w październiku b – miesięczna produkcja bułek żytnich w październiku $a + 400$ – miesięczna produkcja bułek pszennych w listopadzie $1,04b$ – miesięczna produkcja bułek żytnich w listopadzie Wzrost produkcji bułek żytnich w listopadzie w porównaniu do października to: $600 - 400 = 200$ [szt.] 2. Oblicza, ile bułek żytnich wyprodukowano w październiku, a ile w listopadzie. $0,04b = 200$, stąd $b = 5000$ $1,04b = 5200$ 3. Oblicza, ile bułek żytnich wyprodukowano w październiku, a ile w listopadzie i podaje odpowiedź. $a = 5b$, stąd $a = 25\,000$ $a + 400 = 25\,000 + 400 = 25\,400$ Odpowiedź. W listopadzie ta piekarnia wypiekła 5200 sztuk bułek żytnich oraz 25 400 sztuk bułek pszennych.	1p. 1p. 1p.
---	----------------------------------

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Na rysunku przedstawiono bryłę sklejoną z dwóch sześcianów i prostopadłościanu, który nie jest sześcianem. Pole powierzchni całkowitej większego sześcianu wynosi 384 cm^2 , a suma długości jego krawędzi jest taka sama jak suma długości krawędzi prostopadłościanu. Różnica długości boków dolnej podstawy sklejonej bryły jest trzy razy większa niż krawędź mniejszego sześcianu. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły przedstawionej na rysunku.



Uczeń:

1. Przeprowadza analizę treści zadania i oblicza długość krawędzi większego sześcianu oraz sumę długości jego krawędzi.

1p.

a – długość krawędzi większego sześcianu

$$6 \cdot a^2 = 384 ,$$

$$a^2 = 64 , \text{ stąd } a = 8 [\text{cm}]$$

$$12 \cdot a = 96 \text{ cm},$$

2. Oblicza długości krawędzi pozostałych brył.

1p.

b – długość krawędzi mniejszego sześcianu

$8 \times (8+b) \times c$ – wymiary prostopadłościanu

$$8 + c - 8 = c,$$

$$c = 3b ,$$

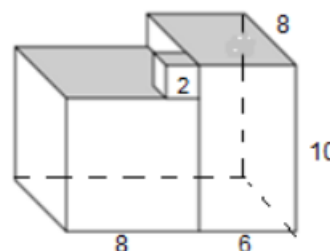
$$4 \cdot 8 + 4 \cdot 3b + 4 \cdot (b + 8) = 96 ,$$

$$4 \cdot 3b + 4 \cdot (b + 8) = 64 ,$$

$$16b = 32, \text{ stąd } b = 2 [\text{cm}]$$

2 cm – długość krawędzi mniejszego sześcianu

8 cm $\times$ 10 cm $\times$ 6 cm – wymiary prostopadłościanu



3. Oblicza pole powierzchni całkowitej bryły przedstawionej na rysunku.

$$Pc = 2 \cdot (60 + 64 + 4) + 2 \cdot (8 \cdot 14) + 2 \cdot (8 \cdot 10) = 640 [\text{cm}^2]$$

lub

$$Pc = 2 \cdot (60 + 64 + 4) + 64 + 2 \cdot 8 + 80 + 8 \cdot 14 + 64 + 48 = 2 \cdot 128 + 144 + 2 \cdot 112 + 16 = 256 + 288 + 144 + 16 = 640 [\text{cm}^2]$$

1p.

Zadanie 10. (0-2 pkt)

W koszykach są grzyby zebrane przez Tymona, Miłosza i Oskara. Każdy koszyk zawiera inną liczbę grzybów, tak jak podano na poniższym rysunku. Dwa koszyki są Tymona, a trzy Miłosza, przy czym liczba wszystkich grzybów jednego z nich jest dwa razy większa od liczby wszystkich grzybów drugiego. Które koszyki należą do poszczególnych chłopców? Odpowiedź uzasadnij.



Uczeń:

1. Analizuje treść zadania i znajduje zależność między liczbami grzybów zebranych przez Tymona i Miłosza.

1p.

Z treści zadania wynika, że jeden z dwóch chłopców, Tymon lub Miłosz, zebrał dwa razy więcej grzybów niż drugi, a więc stosunek liczby zebranych grzybów przez obu chłopców wynosi $2 : 1$ lub $1 : 2$, zatem łączna liczba zebranych przez nich grzybów jest podzielna przez $2 + 1 = 3$.

2. Uzasadnia, które koszyki należą do poszczególnych chłopców.

1p.

Razem zebrano 238 grzybów i jeden z sześciu koszyków należy do Oskara.

Tylko $238 - 40 = 198$ jest liczbą podzielną przez 3, zatem koszyk zawierający 40 grzybów należy do Oskara.

Ponieważ dwaj pozostali chłopcy zebrali razem 198 grzybów, więc jeden z nich zebrał $198 : 3 = 66$ grzybów a drugi 132. Skoro do jednego z nich należą dwa koszyki, a do drugiego trzy, więc jest to możliwe, gdy $66 = 30 + 36$ oraz $132 = 32 + 38 + 62$.

Ostatecznie:

Koszyki Tymona – IV. i V.

Koszyki Miłosza – I., II. i VI.

Koszyk Oskara – III.